[1] 以下の問いに答えよ.

(1) 2つの実数 α, β が

$$\alpha^2+\beta^2=19, \quad \alpha^4+\beta^4=343, \quad 0<\alpha<\beta$$

を満たすとき, $\alpha\beta=\boxed{(1)}$, $\alpha+\beta=\boxed{(2)}$, $\alpha^3+\beta^3=\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ である.
このとき, 定積分

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\left(\frac{4}{19}x^3+\frac{3}{10}x^2-\frac{8}{5}\right)dx$$

は $\boxed{(5)}\sqrt{\boxed{(6)}\boxed{(7)}}$ である.

(2) 座標平面上の 5 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{3},0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{3},0)$, $\mathrm{C}(1,3)$, $\mathrm{D}(-2,3)$, $\mathrm{E}(-2,0)$ を考える.
2 点 A, B を通り, 直線 CD に接する円の方程式は

$$\left(x-\boxed{(8)}\right)^2+\left(y-\boxed{(9)}\right)^2=\boxed{(10)}$$

である. また, 点 P は $\triangle$CDE の 3 辺 CD, DE, EC のいずれかの上にあり, $\angle\mathrm{APB}=60^\circ$ を満たすとする. このような 点 P は全部で $\boxed{(11)}$ 個あるが, そのうち x 座標が最大であるものの座標は

$$\left(\frac{-\boxed{(12)}+\sqrt{\boxed{(13)}}}{\boxed{(14)}}, \frac{\boxed{(15)}+\sqrt{\boxed{(16)}}}{\boxed{(17)}}\right)$$

である.

[2] 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ を，$a_1=4,\ b_1=3$ および

$n=2m-1\ (m=1,2,3,\ldots)$ のとき

$$a_{n+1}=-\frac{6}{5}a_n-\frac{9}{10}b_n,\qquad b_{n+1}=\frac{9}{10}a_n-\frac{6}{5}b_n,$$

$n=2m\ (m=1,2,3,\ldots)$ のとき

$$a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n,\qquad b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n$$

で定める．また，数列 $\{c_n\}$ を，$c_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}a_nb_n\ \ (n=1,2,3,\ldots)$ で定める．

(1) $a_2=-\dfrac{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}}$，$b_3=\boxed{(21)}$ である．

(2) $r=\dfrac{a_5}{a_1}$ とすると，$r=\dfrac{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}$ であり，$\dfrac{b_5}{b_1}=\boxed{(26)}\,r$ である．

(3) $c_{n+4}=\boxed{(27)}\boxed{(28)}\,c_n\ \ (n=1,2,3,\ldots)$ である．

次に，数列 $\{S_n\}$ を，$S_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\ \ (n=1,2,3,\ldots)$ で定め，数列 $\{T_k\}$ を，

$$T_k=\sum_{i=4k-3}^{4k}c_i\qquad(k=1,2,3,\ldots)$$

で定める．

(4) $T_1=-\boxed{(29)}\boxed{(30)}\boxed{(31)}$，$T_{k+1}=\boxed{(32)}\boxed{(33)}\,T_k\ \ (k=1,2,3,\ldots)$ である．

(5) $m\geqq 1$ に対して，$S_{4m}=\sum_{k=1}^{m}T_k$ が成り立つことに注意すると，

$$S_{4m}=u(1-v^m)$$

が得られる．ただし

$$u=\frac{\boxed{(34)}\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}},\quad v=\boxed{(38)}\boxed{(39)}$$

である．また，$m\geqq 1$ に対して，

$$S_n=u+\frac{\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}v^m\qquad(n=4m-3,\ 4m-2,\ 4m-1)$$

である．

[3] 偏りのある硬貨が1枚ある．この硬貨を投げたとき，表が出る確率は $\dfrac{1}{3}$，裏が出る確率は $\dfrac{2}{3}$ である．このとき，規則 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，$\mathbf{A}_3$，$\mathbf{A}_4$ の順に従い，4つの自然数 a_1, a_2, a_3, a_4 を定める．ただし，$\mathbf{A}_1$ および $\mathbf{A}_n$ $(n = 2, 3, 4)$ は以下で与えられる．

$\mathbf{A}_1$：$a_1 = 1$ とする．

$\mathbf{A}_n$：硬貨を1回投げる．表が出て $a_{n-1} \leqq 2$ のとき $a_n = 2a_{n-1}$ とし，それ以外のとき $a_n = a_{n-1}$ とする．

(1) $a_3 = 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{(43)}}{\boxed{(44)}}$ であり，$a_4 = 4$ である確率は $\dfrac{\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\boxed{(47)}}$ である．

以下では，$X = 10^3 a_1 + 10^2 a_2 + 10 a_3 + a_4$ とする．すなわち，X は4つの自然数 a_1, a_2, a_3, a_4 を左から1列に並べて得られる4桁の自然数である．

(2) X の取りうる値は $\boxed{(48)}$ 通りある．

(3) X が3の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{(49)}}{\boxed{(50)}}$ である．また，X が3の倍数であるとき，4の倍数でない条件付き確率は $\dfrac{\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}}$ である．

(4) Y を X の一の位の自然数とするとき，Y の期待値は $\dfrac{\boxed{(53)}\boxed{(54)}}{\boxed{(55)}}$ である．また，X の期待値は $\dfrac{\boxed{(56)}\boxed{(57)}\boxed{(58)}\boxed{(59)}}{\boxed{(60)}}$ である．

[4] t を正の実数とする．x の方程式

$$\left(\log_2 x\right)^2 + \frac{2}{3}\sqrt{t}\,\log_4\left(\frac{1}{x^6}\right) + 4 = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える．

(1) $t = \dfrac{25}{4}$ のとき，方程式 $(*)$ の解をすべて求めよ．

以下では，方程式 $(*)$ は 2 つの実数解 α, β をもち，これらは $\sqrt{2} < \alpha < \beta$ を満たすとする．

(2) t の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) 実数 y を

$$y = \frac{1}{4}\left\{\left(\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha\right) - 14\right\}^2 \left\{\log_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}^2$$

で定める．y を，t を用いて表せ．

(4) (3) で定めた y の取りうる値の範囲を求めよ．

[5] 1辺の長さが1の正方形 ABCD を底面とし，4つの正三角形を側面とする正四角錐 O-ABCD がある．また，t は $0 < t < 1$ を満たす実数とし，OB を $t : (1-t)$ に内分する点を E，OD を $(1-t) : t$ に内分する点を F，$\angle \mathrm{EAF} = \theta$ とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|$，および2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を，t を用いて表せ．

(2) $\cos\theta$ の取りうる値の範囲を求めよ．

以下では，$\cos\theta$ の値が最大になるときを考え，3点 A, E, F の定める平面と直線 OC の交点を G とする．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を，実数 α, β, γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表すとき，α, β, γ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 四角錐 O-AEGF の体積 V を求めよ．

[6] a, b を実数の定数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

と定める．x についての方程式 $f(x) = 0$ が 3 つの実数解 s, t, u をもち，これらは

$$s < t < u, \quad u - t = 2(t - s)$$

を満たすとする．$y = f(x)$ で定まる曲線を C とし，点 $\mathrm{A}(s, 0)$ における曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) a, b および s, u を，t を用いて表せ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ の共有点で，点 A と異なる点を B とする．また C と ℓ で囲まれた図形の面積を S とする．このとき B の x 座標および S を，t を用いて表せ．なお，必要があれば実数 α, β に対して成り立つ等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta) dx = -\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4$$

を用いてもよい．

(3) $7S = -4a + 42b$ が成り立つとき，t の値を求めよ．